

В. Г. СПРИНДЖУК

КЛАССИЧЕСКИЕ
ДИОФАНТОВЫ
УРАВНЕНИЯ
ОТ ДВУХ НЕИЗВЕСТНЫХ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1982

22.13

С 74

УДК 511

Спринджук В. Г. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных.— М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.— 288 с.

В книге впервые излагается систематическая теория решений в целых числах алгебраических неопределенных уравнений от двух неизвестных. На основе единого метода, синтезирующего идеи теории алгебраических и трансцендентных чисел, анализируются все основные типы уравнений. Главное внимание уделяется исследованию влияния параметров уравнений на величины их решений. Все основные и некоторые вспомогательные результаты получены лишь несколько лет назад, многие публикуются впервые.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории чисел и алгебры. Она может быть полезна и математикам других специальностей, интересующимся современным развитием теории чисел.

Библ. 217 назв.

В 169361 | В 169382

Библиотека
Академии наук
БССР

С. $\frac{1702050000-096}{053(02)-82}$ 42-82.

© Издательство «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1982

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Обозначения	10
ГЛАВА I	
ИДЕЙНЫЕ ИСТОКИ	
§ 1. Теорема Рунге	11
§ 2. Неравенство Лиувилля, теорема и метод Туэ	14
§ 3. Показательные уравнения и метод Сколема	19
§ 4. Седьмая проблема Гильберта и ее развитие	23
ГЛАВА II	
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ	
§ 1. Высота и размер алгебраического числа	29
§ 2. Оценки единиц, регуляторов и чисел классов	32
§ 3. Аналитические функции в p -адических полях	39
ГЛАВА III	
ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ ОТ ЛОГАРИФМОВ	
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ	
§ 1. Прямые оценки и связь между оценками в разных метриках	49
§ 2. Предварительные факты	52
§ 3. Вспомогательная система линейных уравнений	56
§ 4. Переход к вспомогательной функции	59
§ 5. Аналитико-арифметическое продолжение	64
§ 6. Завершение доказательства леммы 1.1	69
§ 7. Связь между оценками в разных неархимедовых метриках	77
§ 8. Леммы о прямых оценках	83
ГЛАВА IV	
УРАВНЕНИЕ ТУЭ	
§ 1. Существование вычислимой границы решений	87
§ 2. Зависимость решений от представляемого формой числа	91
§ 3. Исключительные формы	99
§ 4. Оценка решений через основные параметры	102
§ 5. Норменные формы с двумя доминирующими переменными	104
§ 6. Уравнения в относительных полях	110
ГЛАВА V	
УРАВНЕНИЕ ТУЭ — МАЛЕРА	
§ 1. Решение уравнения Туэ в S -целых числах	116
§ 2. Рациональные приближения к алгебраическим числам в нескольких метриках	124
§ 3. Наибольший простой делитель бинарной формы	127

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 4. Обобщенное уравнение Туэ—Малера	132
§ 5. Приближения алгебраических чисел алгебраическими числами фиксированного поля	140

ГЛАВА VI

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Простейшие эллиптические уравнения	147
§ 2. Общее гиперэллиптическое уравнение	153
§ 3. Линейная зависимость трех алгебраических единиц	156
§ 4. Основная теорема	158
§ 5. Оценка числа решений	165
§ 6. Линейная зависимость трех S -единиц	166
§ 7. Решения в S -целых числах	172
§ 8. S -целые точки на эллиптических кривых	174

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Уравнения с фиксированным показателем	181
§ 2. Уравнения с неопределенным показателем	189
§ 3. Уравнение Каталана	193

ГЛАВА VIII

ПРОБЛЕМА ВЕЛИЧИНЫ ЧИСЕЛ КЛАССОВ ИДЕАЛОВ

§ 1. Влияние величины числа классов на величину решений	202
§ 2. Вещественные квадратичные поля	207
§ 3. Поля 3-й, 4-й и 6-й степеней	212
§ 4. Суперпозиции многочленов	216
§ 5. Поля Анкени—Брауэра—Чоула	221
§ 6. Статистический подход	228
§ 7. Предположения и перспективы	237

ГЛАВА IX

ПРИВОДИМОСТЬ МНОГОЧЛЕНОВ И ДИОФАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Теорема неприводимости гильбертова типа	241
§ 2. Основное рассуждение	245
§ 3. Детализация и уточнения	252
§ 4. Теоремы о приводимости	261
§ 5. Доказательства теорем о приводимости	264
§ 6. Дальнейшие результаты и замечания	270
Литература	274
Предметный указатель	285